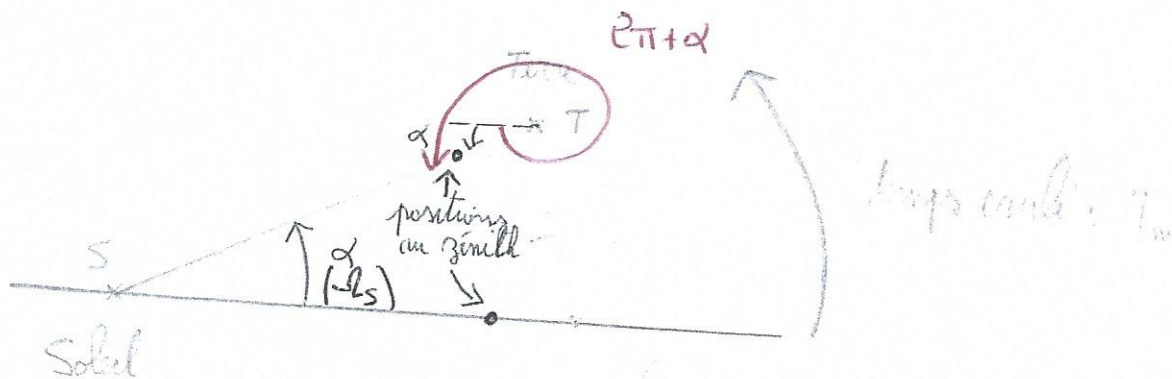


# TD n°2

## Exercice n°1 : Les différentes périodes des astres

① Le schéma ci-dessous représente les évolutions des angles au bout d'un jour solaire moyen :



[ temps écoulé entre 2 positions au zénith :  $T_m$   
angle parcouru :  $2\pi + \alpha$

$$\text{donc } 2\pi + \alpha = \Omega_S T_m = \frac{2\pi}{T_S} T_m \quad (1)$$

$$\text{or } \alpha = \Omega_a T_m = 2\pi \frac{T_m}{T_a}$$

$$\text{soit } (1) \Rightarrow 2\pi + 2\pi \frac{T_m}{T_a} = 2\pi \frac{T_m}{T_S} \Rightarrow \frac{T_m}{T_S} = 1 + \frac{T_m}{T_a}$$

qui permet de déduire  $T_S = \frac{T_m}{1 + \frac{T_m}{T_a}}$

On peut alors former la différence demandée soit :

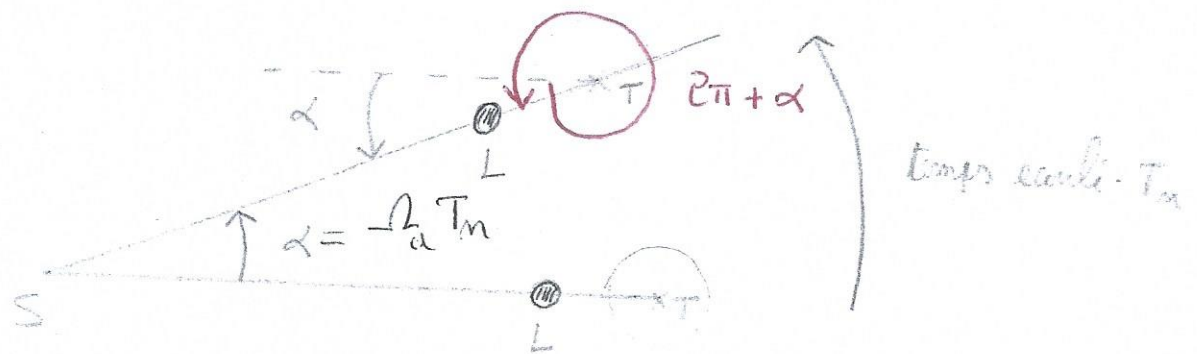
$$T_m - T_S = T_m - \frac{T_m}{1 + \frac{T_m}{T_a}} = \frac{T_m^2}{T_a} \times \frac{1}{\frac{T_a + T_m}{T_a}} \Rightarrow T_m - T_S = \frac{T_m^2}{T_m + T_a}$$

A.N.  $(T_m - T_s = 235,904 \text{ j})$

② On reprend ici la même démarche mais dans le cas de l'étude du mot de la Lune;

Nouvelle lune  $\equiv$  situation d'alignement exact Soleil-Lune-Terre dans cet ordre i.e la "Lune est" "sombre"

$T_m$  est la durée entre 2 nouvelles Lunes  $\Rightarrow$  cf schéma



$$2\pi + \alpha = -\Omega_s T_m \quad \text{or} \quad \alpha = -\Omega_a T_m$$

$$\Rightarrow 2\pi + -\Omega_a T_m = -\Omega_s T_m \Rightarrow 2\pi + 2\pi \frac{T_m}{T_a} = \frac{2\pi}{T_s} T_m \Rightarrow 1 + \frac{T_m}{T_a} = \frac{T_m}{T_s}$$

$$\Rightarrow T_m = \frac{1}{\frac{1}{T_s} - \frac{1}{T_a}} = \frac{T_s T_a}{T_a - T_s}$$

On forme enfin la différence

$$T_m - T_s = \frac{T_s T_a}{T_a - T_s} - T_s = \frac{T_s^2}{T_a - T_s}$$

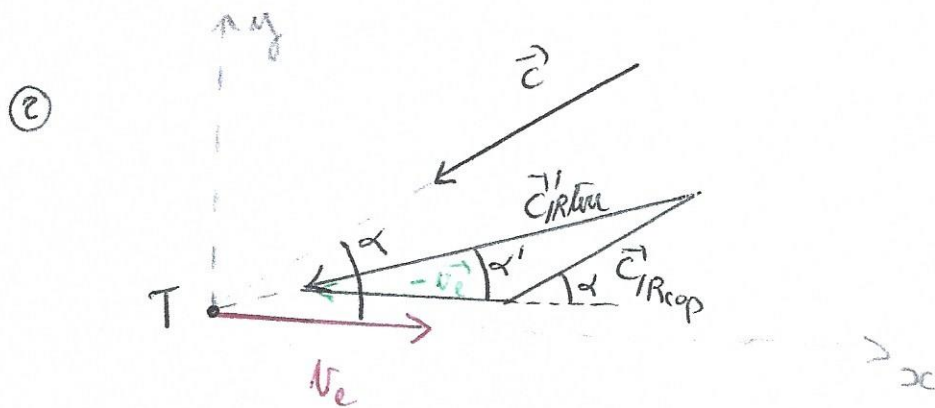
A.N.  $(T_m - T_s = \frac{27,3^2}{365,25 - 27,3} = 2,205 \text{ j})$

## Exercice n°2: Aberration de la lumière provenant des étoiles

① Q.u.ques:  $\vec{v}_a = \vec{v}_T + \vec{v}_e (R_{\text{ter}} / R_{\text{cop}})$

soit si l'on postule la validité pour des vitesses  $v \ll c$ :

$$(e) \Leftrightarrow \vec{c}_{R_{\text{cop}}} = \vec{c}'_{R_{\text{ter}}} + \vec{v}_e \cdot (R_{\text{ter}} / R_{\text{cop}}) \Rightarrow \vec{c}'_{R_{\text{ter}}} = \vec{c}_{R_{\text{cop}}} - \vec{v}_e$$



Par projection sur les axes  $[T; x)$  et  $[T; y)$  on a:

(e).  $\vec{e}_x \Rightarrow c \cos \alpha + v_e = c' \cos \alpha' \quad (L_1)$

(e).  $\vec{e}_y \Rightarrow c \sin \alpha = c' \sin \alpha' \quad (L_2)$

$(L_2) / (L_1) \Rightarrow \boxed{\tan \alpha' = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \frac{v_e}{c}}}$

③ A.N.  $\alpha - \alpha' = \alpha - \arctan \left[ \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \frac{v_e}{c}} \right] = 5,73 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ$

soit en seconde d'angle:  $(\alpha - \alpha')_{(11)} = (\alpha - \alpha')_{(61)} \times 3600 = 20,6''$

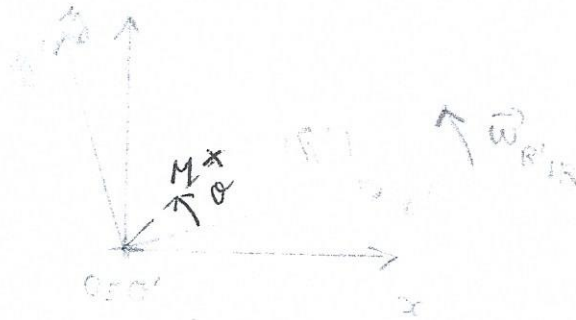
$\Rightarrow$  écart mesurable



# Correction partielle TD n°

## Référentiels non galiléens

Exercice n°4: Objet déposé sur un manège



1<sup>er</sup> cas: objet M déposé par un expérimentateur lié au sol

→ Analyse dans R:

$$\text{BDF: } \begin{cases} \vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_3 \\ \vec{R} = R_n\vec{e}_3 \end{cases} \text{ (puisque par (H) } R_t = 0)$$

$$\text{PFD}_{R'}: m\vec{a}(M)_{R'} = \vec{P} + \vec{R}_n \quad \text{or } \vec{v}(M)_{R'} \text{ plan du disque}$$

$$\Rightarrow 0 = -mg + R_n \quad \text{donc } \left. \vec{a}(M)_{R'} = \vec{0} \right\}$$

$$\text{On en déduit } \vec{v}(M)_{R'} = \vec{v}_0 \quad \text{or à } t=0 \quad \vec{v}(M)_{R'}(t=0) = \vec{0}$$

donc M au repos dans R

→ Analyse dans R':

En référentiel R' est non galiléen; on ajoute donc  $\vec{F}_{ic}$  et  $\vec{F}_{cc}$  dans l'analyse du mouvement:

$$\text{BDF}_{R'}: \begin{cases} \vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_3 \\ \vec{R} = R_n\vec{e}_3 \\ \vec{F}_{ic} = m\omega^2 OM = m\omega^2 r\vec{e}_r \\ \vec{F}_{cc} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{R'} = -2m\omega\vec{e}_3 \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \end{cases}$$

Soit  $\vec{F}_{ic} = -\rho m \omega \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho m \omega \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

PFD<sub>R'</sub>:  $m \left[ (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho + (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) \vec{e}_\theta \right] = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ic} + \vec{F}_{ic}$

$\xrightarrow{\vec{e}_\rho}$   $-mg + R_m = 0$  (1)

$\Rightarrow \xrightarrow{\vec{e}_\rho}$   $\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 = \omega^2 \rho + 2\omega \dot{\rho}$  (2)

$\xrightarrow{\vec{e}_\theta}$   $\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} = -2\omega \dot{\rho}$  (3)

En faisant (3) x ρ que l'on intègre il vient

(3) x ρ ⇒  $\rho \dot{\rho} \dot{\theta} + \rho^2 \ddot{\theta} = -2\omega \rho \dot{\rho} \xrightarrow{\int \cdot dt} \rho^2 \dot{\theta} = -\rho^2 \omega \Rightarrow \dot{\theta} = -\omega$

Puis en injectant ce résultat dans (2):

$\ddot{\rho} - \rho \omega^2 = \rho \omega^2 - 2\rho \omega^2 \Rightarrow \ddot{\rho} = 0 \Rightarrow \rho = \rho_0 + \omega t \Rightarrow \rho = \omega t$

Conclusion: la trajectoire dans R' est un cercle de rayon  $\rho = \rho(t=0)$  et parcouru à la vitesse angulaire  $(-\omega)$

2<sup>nd</sup> cas: Objet M déposé par un expérimentateur posé immobile sur le manège.

→ Analyse dans R:

$m \vec{a}(M)_{R'} = \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$  donc  $\vec{a}(M)_{R'} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}(M)_{R'} = \omega t \vec{e}_\theta$

or à  $t=0$   $\vec{v}(M)_{R'} = \rho_0 \omega \vec{e}_\theta(t=0) = \omega t \vec{e}_\theta \Rightarrow$  trajectoire rectiligne  
choix  $\rho_0 \omega = \omega t$

→ Analyse dans R':

L'analyse est un peu plus délicate et nécessite de passer en coordonnées:

le PFD s'écrit en choisissant la base  $[0; x'; y']$

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_m \end{pmatrix} + m \omega^2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} - 2m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } \begin{cases} \ddot{x}' = \omega^2 x' + 2\omega \dot{y}' & (L_1) \\ \ddot{y}' = \omega^2 y' - 2\omega \dot{x}' & (L_2) \end{cases}$$

→ méthode très classique (vue en MPSI lors de l'étude du mouvement des particules en chp  $(\vec{E}; \vec{B})$ !) : On pose  $\underline{u} = x' + iy'$

et on forme  $(L_1) + i(L_2)$ :

$$\ddot{\underline{u}} = \omega^2 \underline{u} - 2\omega i \dot{\underline{u}} \Rightarrow \underline{\ddot{u}} + 2\omega i \dot{\underline{u}} - \omega^2 \underline{u} = 0 \quad (e)$$

Discriminant réduit:  $\Delta' = -\omega^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow$  Solution pc:  $\lambda = -\omega i$

donc la solution de (e) s'écrit:  $\underline{u}(t) = (a t + b) e^{-i\omega t}$

$$\text{C.I. } \left. \begin{array}{l} x'(0) = x_0 \leftarrow \text{on aligne } \Pi \text{ sur } [0x'] \\ y'(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{u}(0) = b = x_0$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}'(0) = 0 \\ \dot{y}'(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{\underline{u}}(0) = a - i\omega b = 0 \Rightarrow a = i\omega x_0$$

$$\text{donc } \underline{u}(t) = x_0 (1 + i\omega t) e^{-i\omega t}$$

on en déduit les équations paramétriques du mouvement de  $\Pi$ :

$$x(t) = \text{Re}[\underline{u}(t)] = x_0 \cos \omega t + x_0 \omega t \sin \omega t = x_0 (\cos \omega t + \omega t \sin \omega t)$$

$$y(t) = \text{Im}[\underline{u}(t)] = -x_0 \sin \omega t + x_0 \omega t \cos \omega t = x_0 (-\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$$

Allure de la trajectoire: Spirale.





Exercice n°7: Le jeu du verre d'eau.

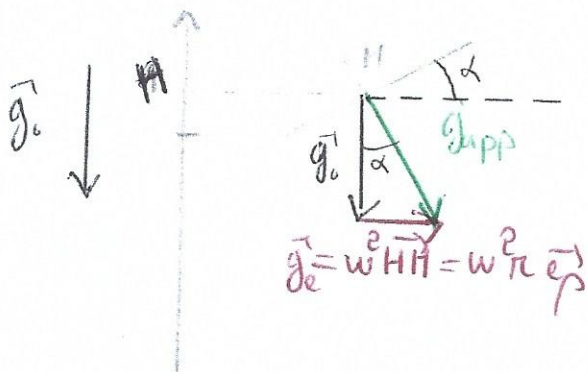
idée on néglige les termes  $o\omega^2$

En faisant tourner le verre sur son axe, un "ménisque" apparaît par effet centrifuge, risquant de faire déborder le verre.



Idée: Pour un liquide au "repos" relative, donc dans le référentiel tournant du verre ( $\vec{\omega}$ ) la surface reste  $\perp$  à la pesanteur apparente soit  $\vec{g}_{app} = \vec{g}_0 + \vec{g}_c$

$\hookrightarrow$  lié à l'effet centrifuge.





NB: on peut redéfinir ceci de manière plus complète en faisant un bilan de force sur une masse élémentaire dm autour du pt M et on lui applique le PFD en statique dans

$R_{\text{voire}}$ :

$$\Rightarrow \rho_0 d\tau \vec{a}_n(M) = \vec{0} = \rho_0 d\tau \vec{g}_0 + \rho_0 d\tau \text{HMW}^2 \vec{e}_\rho + \underbrace{(\rho_0 d\tau \vec{e}_n)}_{\text{Pousée d'Archimède}} d\vec{\pi}$$

$$d\vec{\pi} = -(\rho_0 d\tau) \underbrace{(\vec{g}_0 + \text{HMW}^2 \vec{e}_\rho)}_{\vec{g}_{\text{app}}}$$

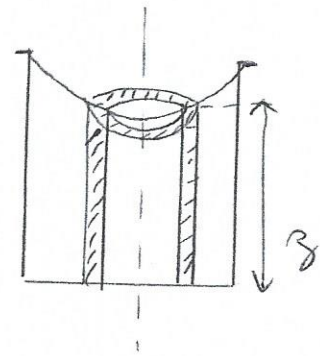
$$\tan \alpha_n(M) = \frac{S_{\text{ce}}(M)}{g} = \frac{\pi w^2}{g} = \frac{dz}{dr} \Rightarrow z = \frac{w^2 r^2}{2g} + \underbrace{(\text{cte})}_{\pi?}$$

$$\text{cte} = z(r=0) = \underbrace{(A'_0)}_{\text{?}}$$

Détermination de  $A'_0$ :

$$V = \pi R^2 h_0 \text{ connu}$$

| volume élémentaire:  $d\tau = 2\pi r dr \times z$   
calotte cylindrique



$$\Rightarrow d\tau = 2\pi r dr \left( \frac{w^2 r^2}{2g} + A'_0 \right)$$

$$\text{Soit on intègre: } V = 2\pi \left[ \frac{w^2 R^4}{8g} + \frac{A'_0 R^2}{2} \right] = \frac{\pi w^2 R^4}{4g} + \pi A'_0 R^2$$

avec le volume au repos:

$$\pi R^2 h_0 = \frac{\pi R^4 w^2}{4g} + \pi A'_0 R^2$$

$$\Rightarrow h'_0 = h_0 - \frac{R^2 w^2}{4g}$$

Bilan:

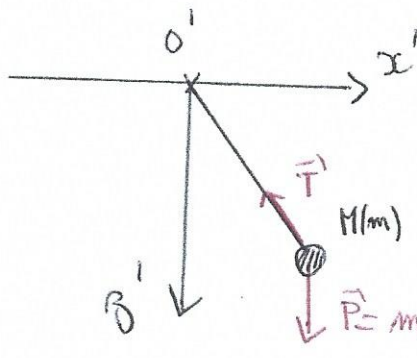
$$z = \frac{w^2}{2g} \left( r^2 - \frac{R^2}{2} \right) + h'_0 \text{ équation de la surface libre.}$$

② Condition pour remporter le jeu:

$$z(r=R) > H_0 \text{ soit } \frac{w^2}{2g} \left( R^2 - \frac{R^2}{2} \right) + h_0 > H_0$$

$$\Rightarrow w > \left( \frac{(H_0 - h_0) 4g}{R^2} \right)^{1/2}$$

Exercice n°8: un solide vraiment ponctuel



$$\begin{aligned} \vec{a}_e &= -a_e \vec{e}_z \text{ en montée} \\ \vec{a}_e &= +a_e \vec{e}_z \text{ en descente} \end{aligned} \quad (a_e > 0)$$

PFD dans  $R'$ :  $(e) m \vec{a}^{\ddot{}}(H)_{|R'} = \sum \vec{F}_{\text{raais}} + \vec{F}_{ic} + \vec{F}_{ie} = \vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_{ic} - m \vec{a}_e$

Cas de la montée:

$$(e): m[l\ddot{\theta} \vec{e}_\theta - l\dot{\theta}^2 \vec{e}_r] = -T \vec{e}_r + \vec{F}_{ic} + m a_e \vec{e}_z + mg \vec{e}_z$$

$$\xrightarrow{\vec{e}_\theta} \ddot{\theta} = -\frac{(g+a_e) \sin\theta}{l} \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_{om}^2 \theta \approx 0$$

donc période en montée:  $T_m = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g+a_e}}$  avec  $\left| \begin{array}{l} \sin\theta \approx \theta \\ \omega_{om}^2 = \sqrt{\frac{g+a_e}{l}} \end{array} \right.$

$$\Rightarrow T_m = \left( 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a_e}{g}}}$$

$$\Rightarrow T_m = T_0 \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

Cas de la descente:

en reprenant la même démarche et en inversant le rôle de  $\vec{a}_0$  il vient :

$$T_d = T_0 \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

Ecart entre temps mesuré et temps "véritable" :

en montée:  $T_m - T_0 = T_0 \left[ \frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 \right] < 0$

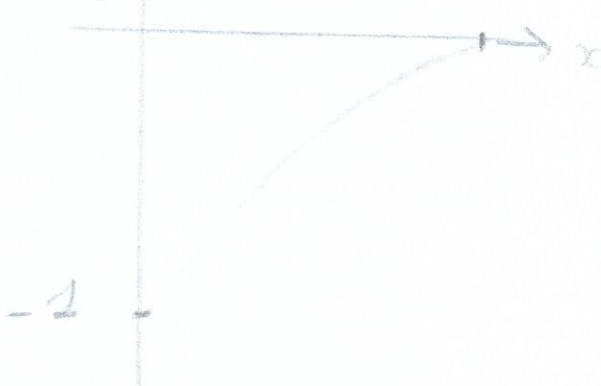
en descente  $T_d - T_0 = T_0 \left[ \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1 \right] > 0$

Conclusion:  $T_m < T_0 \Rightarrow -\Omega_m > -\Omega_0 \Rightarrow$  *liftier surpayé en montée*  
 $T_d > T_0 \Rightarrow -\Omega_d < -\Omega_0 =$  *— sous-payé en descente*

question: compensation montée-descente?

Idee: on peut tracer  $f(x) = \frac{T_m - T_0}{T_d - T_0}$  pour  $x \in ]0; 1[$   
(NB:  $a_0 < g$ )

$$\Rightarrow f(x) = \left( \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1} \right)$$

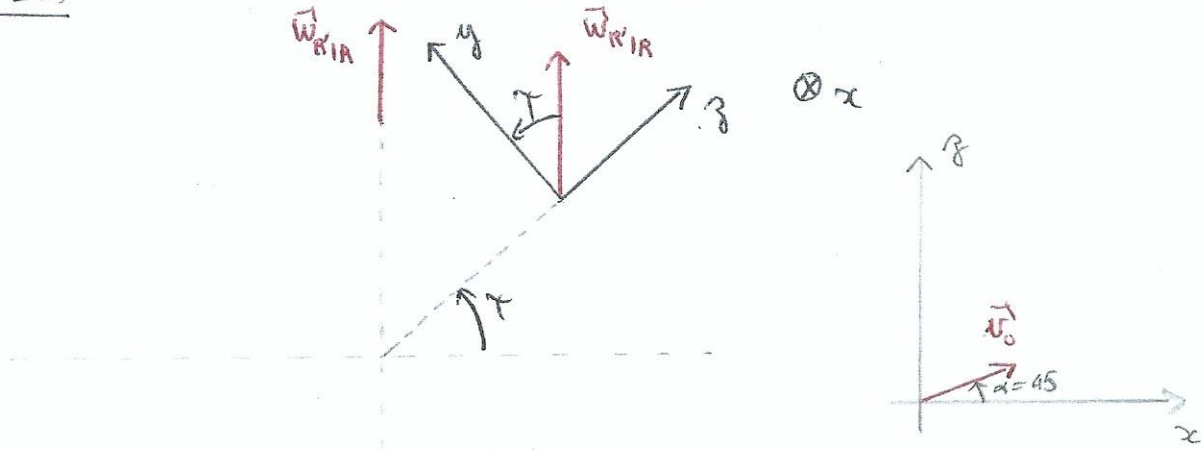


Bilan:  $\forall a \in ]0; g[$  on a  
 $f(x = \frac{a}{g}) > -1$

donc le liftier est sous payé puisque la compensation exacte serait  $f(x) = -1$



Exercice n°12:



1) ④ Ref galiléen  $\Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_{ce} = \vec{0} \\ \vec{F}_{cc} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \vec{a}^{(M)}|_{R_{ter}} = -g \vec{e}_z \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$

$\rightarrow \dots \rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha t \end{cases}$

Pour  $x(t_v) = v_0 \cos \alpha t_v = x_{final} \Rightarrow t_v = \frac{x_{final}}{v_0 \cos \alpha}$  A.N  $t_v = 11,8 \text{ min}$

$z(t_v) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} g t_v^2 + v_0 \sin \alpha t_v = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} g \frac{x_{final}^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + \frac{v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} x_{final} = 0$

$\Leftrightarrow v_0 = \left[ \frac{g x_{final}}{2 \cos^2 \alpha \sin \alpha} \right]^{1/2}$  A.N  $v_0 = 5000 \text{ m.s}^{-2}$

②  $\rightarrow$  On suppose toujours que la pesanteur est relative au référentiel galiléen

PFD dans  $R_{\text{tern}}$ :

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - 2m\bar{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega\lambda \\ \sin\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

NB: calcul item n° 5

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -2\omega [\cos\lambda \dot{y} - \sin\lambda \dot{z}] & (1) \\ \ddot{y} = -2\omega \sin\lambda \dot{x} & (2) \\ \ddot{z} = -g + 2\omega \cos\lambda \dot{x} & (3) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \dot{y} = -2\omega \sin\lambda x + \frac{v_0}{\omega} \quad \text{à } t=0 \quad \begin{cases} \dot{y}(0) = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow v_0 = 0$$

$$(3) \Rightarrow \dot{z} = -gt + 2\omega \cos\lambda x + \frac{v_0}{\omega} \quad \text{à } t=0 \quad \begin{cases} \dot{z}(0) = v_0 \sin\alpha \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

donc  $v_0 = v_0 \sin\alpha$

soit (3)  $\Rightarrow \dot{z} = -gt + 2\omega \cos\lambda x + v_0 \sin\alpha$

On injecte ces 2 équations dans (1):

$$(1) \Rightarrow \ddot{x} = -2\omega [\cos\lambda (-gt + 2\omega \cos\lambda x + v_0 \sin\alpha) + \sin\lambda 2\omega \sin\lambda x]$$

$$(1) \Rightarrow \ddot{x} + 4\omega^2 x = +2\omega \cos\lambda g t - 2\omega v_0 \sin\alpha \cos\lambda$$

⊙ Comme en exercice n° 5,  $4\omega^2 \ll \ddot{x}$  par hypothèse

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \omega \cos\lambda g t^2 - 2\omega v_0 \sin\alpha \cos\lambda t + \frac{v_0 \cos\alpha}{\omega}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{3} \omega \cos\lambda g t^3 - \omega v_0 \sin\alpha \cos\lambda t^2 + v_0 \cos\alpha t$$

$$\text{donc } \ddot{y} = -2\omega \sin \lambda \left[ \frac{1}{3} \omega \cos \lambda g t^3 - \omega v_0 \sin \alpha \cos \lambda t^2 + v_0 \cos \alpha t \right]$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{6} \omega^2 \sin \lambda \cos \lambda g t^4 + \frac{2}{3} \omega^2 v_0 \sin \lambda \cos \lambda \sin \alpha t^3 - \omega v_0 \sin \lambda \cos \alpha t^2$$

(+cte=0)

$$\text{et } z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + \frac{1}{6} \omega^2 \cos^2 \lambda g t^4 - \frac{2}{3} \omega^2 v_0 \sin \alpha \cos^2 \lambda t^3$$

$$+ v_0 \omega \cos \lambda \cos \alpha t^2 + v_0 \sin \alpha t$$

Temps de vol corrigé: résolution de  $z(t'_v) = 0 \Rightarrow t'_v = 748,2 \text{ s}$

$$\text{Point d'impact pour } t'_v = 748,2 \text{ s} : \begin{cases} x(t'_v) = 2613,95 \text{ km} \\ y(t'_v) = -100,49 \text{ km} \end{cases}$$

Conclusion: le missile frappera la banlieue sud-est de Moscou.